

Иерархия нелинейного уравнения Шредингера

Опишем вывод высших симметрий для (комплексной) системы НШ

$$u_t = u_{xx} + 2u^2v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2, \quad (1)$$

исходя из условия совместности вспомогательных линейных задач

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_T = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_T = V_x + [V, U]. \quad (2)$$

Здесь T одно из времен иерархии НШ (в том числе, само t), матрица U и вектор Ψ имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} \lambda/2 & u \\ -v & -\lambda/2 \end{pmatrix} = \lambda U_0 + U_1, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

(ср. с задачей 19, где требовалось проверить ответ для самой системы НШ и её симметрии порядка 3; сейчас мы обобщим эти результаты). Уравнение $\Psi_x = U\Psi$ с заданной матрицей U играет для (1) ту же роль, что уравнение $\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0$ для КдФ.

Алгоритм. Прежде всего, заметим, что можно считать $\text{tr } V = 0$ без потери общности. Действительно, пусть $V = \tilde{V} + aI$, где $\text{tr } \tilde{V} = 0$. Применяя tr к (2) получаем $a_x = 0$, то есть, $a = a(T)$, и можно положить $a = 0$, сделав замену вида $\Psi = b(T)\tilde{\Psi}$.

Будем искать матрицу V в виде многочлена по λ :

$$V = \lambda^n V_0 + \lambda^{n-1} V_1 + \cdots + V_n.$$

Подставляем в (2):

$$U_{1,T} = (\lambda^n V_0 + \lambda^{n-1} V_1 + \cdots + V_n)_x + [\lambda^n V_0 + \lambda^{n-1} V_1 + \cdots + V_n, \lambda U_0 + U_1];$$

собирая коэффициенты при степенях λ , получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} [V_0, U_0] &= 0, \\ V_{j,x} + [V_j, U_1] + [V_{j+1}, U_0] &= 0, \quad j = 0, \dots, n, \\ U_{1,T} = V_{n,x} + [V_n, U_1] &= [U_0, V_{n+1}], \end{aligned} \tag{3}$$

где мы ввели для удобства дополнительную матрицу V_{n+1} , определённую таким же соотношением, как и предыдущие. Перейдем на уровень матричных элементов:

$$U_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{pmatrix}, \quad V_j = \begin{pmatrix} r_j & p_j \\ q_j & -r_j \end{pmatrix},$$

тогда эти уравнения сведутся к

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 = 0, \\ \begin{cases} r_{j,x} = uq_j + vp_j, \\ p_{j+1} = p_{j,x} + 2ur_j, \\ q_{j+1} = -q_{j,x} - 2vr_j, \end{cases} & \quad j = 0, \dots, n, \\ u_T &= p_{n+1}, \quad v_T = q_{n+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Представляя r_j в виде интеграла $D_x^{-1}(uq_j + vp_j)$, можно записать рекуррентное соотношение для p_j, q_j в операторном виде

$$\begin{pmatrix} p_{j+1} \\ q_{j+1} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & -D_x \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} D^{-1} \langle (v, u), \cdot \rangle,$$

где $\langle, \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение строки на столбец.

Мы получили оператор рекурсии для иерархии НШ. Положим $r_0 = 1/2$ и $p_1 = u$, $q_1 = -v$, тогда соответствующая система запишется в виде

$$\begin{pmatrix} u_T \\ v_T \end{pmatrix} = R^n \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}.$$

Если выбирать постоянные интегрирования так, чтобы в результате получались многочлены, однородные относительно весов $w(u_j) = w(v_j) = j + 1$, то возникает такая последовательность (попробуйте воспроизвести её, это несложное упражнение):

$$\begin{aligned} u_{t_0} &= u, & v_{t_0} &= -v, \\ u_{t_1} &= u_x, & v_{t_1} &= v_x, \\ u_{t_2} &= u_{xx} + 2u^2v, & -v_{t_2} &= v_{xx} + 2uv^2, \\ u_{t_3} &= u_{xxx} + 6uvu_x, & v_{t_3} &= v_{xxx} + 6uvv_x, \\ u_{t_4} &= u_{xxxx} + 8uvu_{xx} + 2u^2v_{xx} + 4uu_xv_x + 6vu_x^2 + 6u^3v^2, & -v_{t_4} &= u_{t_4}|_{u \leftrightarrow v}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Дифференцирования D_{t_0} и D_{t_1} отвечают классическим симметриям (растяжение $u \rightarrow e^a u$, $v \rightarrow e^{-a} v$ и сдвиг x , соответственно), D_{t_2} это сама система (1), а D_{t_3}, D_{t_4} и так далее — её высшие симметрии.

Можно проверить, что все выписанные дифференцирования действительно попарно коммутируют (попробуйте модифицировать имеющиеся программы, расширив набор динамических переменных так, чтобы можно было работать с системами на u, v , и проверьте это).

Всё вроде бы хорошо, но кое-что непонятно.

Вопросы к алгоритму

- В рекуррентных соотношениях (4) при вычислении r_j приходится интегрировать. Верно ли, что интеграл всегда берётся, то есть, что $uq_j + vp_j \in \text{Im } D_x$?
- Насколько важен выбор констант интегрирования? В частности, что будет, если брать их зависящими от каких-то времён t_k ?
- Как доказать в общем виде, что построенные дифференцирования коммутируют?

Ответы

- Так как вид уравнений для V_j не зависит от степени n , можно ввести для них производящую функцию

$$A = V_0 + V_1/\lambda + V_2/\lambda^2 + \dots,$$

удовлетворяющую уравнению

$$A_x = [U, A]. \quad (5)$$

У него имеется первый интеграл: по формуле Лиувилля $(\log \det A)' = \text{tr } A' A^{-1}$ имеем

$$(\log \det A)_x = \text{tr}(U - AUA^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\det A)_x = 0.$$

Отсюда следует, что

$$-\det A = (r_0 + r_1/\lambda + \dots)^2 + (p_0 + p_1/\lambda + \dots)(q_0 + q_1/\lambda + \dots) = c_0 + c_1/\lambda + \dots$$

с некоторыми постоянными c_j , откуда видно, что все r_j находятся алгебраически.

- Коэффициенты c_j играют роль постоянных интегрирования. Любые два решения уравнения (5) отличаются скалярным множителем $\alpha_0 + \alpha_1/\lambda + \dots$ не зависящим от x (в частности, можно его выбрать так, чтобы все c_j , кроме c_0 , были равны 0, что отвечает однородному решению).

В принципе, c_j можно брать зависящими от времён, но это нарушает коммутативность потоков. Мы докажем её для случая, когда c_j ни от чего не зависят.

- Продолжим дифференцирование D_T , определяемое равенством $U_T = V_x + [V, U]$ ряд A , такой, что $(\det A)_T = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} A_{xT} &= [V_x + [V, U], A] + [U, A_T] = [V_x, A] + [[V, A], U] + [V, [U, A]] + [U, A_T] \\ &= [V_x, A] + [V, A_x] + [[V, A], U] + [U, A_T], \end{aligned}$$

что равносильно тому, что матрица $B = A_T - [V, A]$ удовлетворяет тому же уравнению, что и A . Отсюда следует, что $B = \beta A$, где β формальный скалярный ряд по λ^{-1} , то есть, A удовлетворяет уравнению

$$A_T = [V, A] + \beta A.$$

Из формулы Лиувилля следует $(\log \det A)_T = 2\beta$ и по предположению получаем, что $\beta = 0$. Итак, если константы интегрирования ни от чего не зависят, то дифференцирования A по двум разным временам определяются уравнениями вида

$$A_T = [V, A], \quad V = (\lambda^n A)_{\geq}, \quad A_\tau = [W, A], \quad W = (\lambda^m A)_{\geq} \quad (6)$$

где значок $\geq$ обозначает конечную часть ряда с неотрицательными степенями λ ; аналогично, значком $<$ обозначим остаток ряда. Покажем, что два таких дифференцирования коммутируют. Нетрудно видеть, что для этого достаточно доказать равенство

$$D_T(W) - D_\tau(V) = [V, W]. \quad (7)$$

В следующем вычислении используются очевидные тождества для любых рядов P, Q

$$P = P_{\geq} + P_{<}, \quad [P_{<}, Q_{<}]_{\geq} = 0, \quad [P_{\geq}, Q_{\geq}]_{\geq} = [P_{\geq}, Q_{\geq}].$$

Имеем:

$$\begin{aligned} D_T(W) &= D_T((\lambda^m A)_{\geq}) = (\lambda^m [V, A])_{\geq} \\ &= [(\lambda^n A)_{\geq}, \lambda^m A]_{\geq} \\ &= [-(\lambda^n A)_{<}, (\lambda^m A)_{\geq} + (\lambda^m A)_{<}]_{\geq} \\ &= [-(\lambda^n A)_{<}, (\lambda^m A)_{\geq}]_{\geq} \\ &= [-\lambda^n A + (\lambda^n A)_{\geq}, (\lambda^m A)_{\geq}]_{\geq} \\ &= -[\lambda^n A, (\lambda^m A)_{\geq}]_{\geq} + [(\lambda^n A)_{\geq}, (\lambda^m A)_{\geq}] \\ &= D_{\tau}(V) + [V, W], \end{aligned}$$

что и требуется.

Отметим, что приведённое доказательство весьма универсально. Оно остаётся в силе для уравнений (6) на произвольной алгебре Ли (вместо sl_2 , с которой мы сейчас работали); кроме того, оно допускает множество обобщений, когда ряды разбиваются на две части иными способами.